

بنام خدا

✳️ رابطه‌ی خطی بین عناصر بردار صدادنی

دو بردار خطی بین عناصر بردار صدادنی، در پردازش بردارها، اهمیت دارد. در سارردی
ممكن است بتوانیم از دو بردار خطی برای پردازش استفاده کنیم. در سارردی ممكن است بخواهیم
رابطه‌ی خطی را حذف کنیم. بنابراین در هر شخصی دو بردار خطی بین عناصر بردار، برای ما

اهمیت دارد.

منظور از بردارهای عمودی بین عناصر بردار $\underline{x}$ این است که

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \quad ; \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

$$\underline{1} \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

- رابطه‌ی عمودی بین عناصر بردار $\underline{x}$ را می‌توان به صورت ضرب داخلی بنویست.

$$\underline{V} = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{V}^H \underline{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V} \perp \underline{x}$$

برای ترتیب و بردارهای فعلی بین عناصر بردار مقادیری x به نحای دیکر یک راستای مشخص y در فضای برداری است که تمامی بردارهای عددی متناظر با x بر آن راستا، عمود هستند.

$$\underline{y} \perp \underline{x} \quad (\S)$$

- برای نشان دادن دیکر رابطه‌ی فعلی بین عناصر بردار x ، نشان دادن ساری

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

به معنای MS ، برای اثبات دیکر رابطه، کافی است معنی

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \stackrel{MS}{=} 0$$

$$E \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - 0 \right|^2 = 0$$

$$\in \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right|^2 = 0 \Rightarrow \text{رابطه خطی بین عناصر بردار } x \text{ وجود دارد.}$$

برای نشان دادن وجود رابطه خطی بین عناصر بردار صداتی، ضربه زیرین را یک کنید، است.

ضربه: شرط لازم رکافی برای اینکه رابطه خطی بین عناصر بردار صداتی x وجود داشته باشد، این است که ماتریس R_x معکوس نگیرد. یعنی R_x معکوس نگیرد.

$$\text{یعنی } \det(R_x) = 0$$

از ضرب خطی داریم که سیلولار بدان معنی ماتریس R_x معکوس نگیرد. یعنی این است که دست کم یکی از عناصر بردار x معکوس نگیرد. به راحتی نشان دادیم که ماتریس R_x معکوس نگیرد که ماتریس بردارهای عددی مشخصاً x بر آن

محدود هستند، برابر دیرهای متناظر با مقدار دیرهای منفرات. (یعنی ضرایب ترکیب خطی $(\sum a_i x_i)$)

یادآوری: بردارهای دیر و مقادیر دیر برای یک ماتریس $A_{n \times n}$

برای یک ماتریس $A_{n \times n}$ ، رابطه‌ی بردار دیر و مقدار دیر به صورت زیر بیان می شود:

$$A \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

مقدار دیر λ
بردار دیر $\underline{v}$

برای به دست آوردن بردارهای دیر و مقادیر دیر، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$A \underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \Rightarrow \quad A \underline{v} - \lambda \underline{v} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) \underline{v} = \underline{0}$$

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad (A - \lambda I) \underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I)$$

* جواب بدیهی $\underline{v} = \underline{0}$ جزو بردارهای ویژه محسوب نمی شود.
 - برای اینکه دستگاه معادلات (I) دارای جواب غیر صفر باشد، این است که ماتریس ضرایب صفر باشد.
 باشد، به عبارت دیگر داشته باشیم
 $\det(A - \lambda I) = 0$

رابطه $\det(A - \lambda I) = 0$ یک چندجهانی مرتبه n بر حسب λ است که از حل

معادله n جواب $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ برای سدهای ویژهی ماتریس A بدست
می آید.

معادله $\det(A - \lambda I) = 0$: معادلهی مشخصه $\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{جواب}}$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

برای بدست آوردن بردارهای ویژهی ماتریس A ، دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم.

$$A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

بردار ویژهی متعلق
به λ_i : بردار ویژهی λ_i

می دانیم که اگر v ضرب کس از معادلات بالا باشد،
 $\|v\|$ نیز ضرب معادله است. برای
 آنکه بردار معادله، مقصوره تر باشد، یک شرط اضافی بر روی بردارهای دیگر، گذاشته می شود.
 این شرط، نرمالیزه بودن بردارهای دیگر است یعنی

$$A v_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\|v_i\|_2^2 = 1$$

نرمالیزه کردن بردار

لینک

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = \langle v, v \rangle = v^H v = \text{trace}(v v^H)$$

جمع عناصر روی قطر اصلی ماتریس

در ارتباط با بردارهای ویژه، مقادیر ویژه کی می‌توانیم $A_{n \times n}$ ، ضربات زیر قابل درج است.

$$1) \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

(2) اگر ماتریس A برای تقارن هرستیک باشد یعنی $A^H = A$ ، آنگاه تمام

مقادیر ویژه‌ی ماتریس A حقیقی خواهند بود و بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه‌ی

مختلف به هم عمود خواهند بود.

$$\lambda_i \perp \lambda_j, \quad i \neq j$$

(3) اگر ماتریس A متقارن باشد، یعنی $A^T = A$ در این صورت ماتریس A متقارن است.

بردارهای دیرینه مارکس A، یعنی خراجندبود، بردارهای دیرینه مناسط باستاد بر دیرینه کی گفت
برهم غمدر خراجندبود.

انسان سے:

ان شرط لازم : مرفعی نسیم اربعی خطی بن خاصر بردار $\times$ و بردار د نشان می احمیه مرفعی حسی
سیدلار است.

$$\exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n; \quad \langle \underline{x}, \underline{v} \rangle = 0 \quad \wedge \quad \underline{v}^H \underline{x} = 0$$

$$\underline{v}^H \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x}^H \underline{v} = 0 \xrightarrow[\text{ضرب در } \underline{v}]{\text{حرف مضاعف } \underline{x}} \underline{x} \underline{x}^H \underline{v} = \underline{0}$$

$$\xrightarrow[\text{ماتریس } R_x]{\text{از طرفین اسکرین}} \underbrace{E \underline{x} \underline{x}^H}_{R_x} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow R_x \underline{v} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_i ; \lambda_i = 0, \quad R_x \underline{v} = \lambda_i \underline{v}$$

$\Leftarrow \lambda_i = 0$ میں از سادہ ریڈیٹری مائٹریس R_x است $\underline{v}$ کان برادر ریڈیٹری سائبر اعداد ریڈیٹری مائٹریس.

$$\xrightarrow[\text{ماتریس}]{\text{میان سادہ ریڈیٹری}} \det(R_x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0 \rightarrow R_x \text{ سادہ ریڈیٹری است}$$

شرط کافی: فرض کنیم که ماتریس همبستگی سیدرله راست را نشان می‌دهیم که رابطه‌ی فصل بین عناصر بردار وجود دارد.

$$\det(R_x) = 0 \implies \exists \lambda_i, \lambda_i = 0, R_x \underline{v} = \lambda_i \underline{v} = \underline{0}$$

$$R_x \underline{v} = \underline{0} \implies \underline{v}^H \underline{X} \underline{X}^H \underline{v} = \underline{0} \xrightarrow[\text{فرض کنیم}]{\text{حاصل بردار} \underline{v}^H} \underline{v}^H \underline{X} \underline{X}^H \underline{v} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{استدلال}]{\text{فصل بردار}} \underline{v}^H \underbrace{\underline{X}}_{\alpha} \underbrace{\underline{X}^H}_{\alpha^*} \underline{v} = 0 \implies \underline{v}^H \underline{X} \underline{X}^H \underline{v} = 0$$

$$\implies \underline{v}^H \underline{X} \stackrel{MS}{=} 0 \implies \text{رابطه‌ی فصل بین عناصر بردار} \underline{X} \text{ وجود دارد.}$$

در ادامه می‌خواهیم برخی مفروضات ماتریس $\underline{H}$ های قبلی را معرفی کنیم که در بحث راندهای تصادفی نیز از این مفروضات استفاده خواهد شد.

1. همان‌طور که مثلاً $\underline{H}$ نیز $\underline{H}^H = \underline{H}$ ماتریس $\underline{H}$ های بردار تصادفی $\underline{x}$ در حالت طی رانای متوازن هر سید است یعنی $\underline{H}^H = \underline{H}$ را بر بردار $\underline{x}$ صحتی باشد، ماتریس $\underline{H}$ متوازن (صحتی) خواهد بود یعنی $\underline{H}^T = \underline{H}$ سایر این می‌راند نتیجه گیری کرد که در حالت طی تمامی مقادیر دژهای ماتریس $\underline{H}$ صحتی هستند و بردارهای دژهای متناظر با مقادیر دژهای مختلف، برهم عمود هستند. اگر بردار $\underline{x}$ صحتی باشد، بردارهای دژهای نیز صحتی خواهند بود.

۲. ماتریس به طایب گفته می‌شود. در صورتی که، س‌ی تَران‌ما استند از بردارهای دژیری س‌ی س‌ی س‌ی س‌ی
 P_x یک ماتریس یگانگی (unitary) بر صورت زیر س‌یافت.

$$V = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]$$

$$V^H V = I \xrightarrow{V \text{ ماتریس یگانگی}} V^H V = V V^H = I, \quad V^{-1} = V^H$$

$$V^H = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^H \\ \underline{v}_2^H \\ \vdots \\ \underline{v}_n^H \end{bmatrix} \rightarrow V^H V = \begin{bmatrix} \underbrace{\underline{v}_1^H \underline{v}_1}_{\|\underline{v}_1\|^2} & \underbrace{\underline{v}_1^H \underline{v}_2}_0 & \dots & \underbrace{\underline{v}_1^H \underline{v}_n}_0 \\ \underline{v}_2^H \underline{v}_1 & \underbrace{\underline{v}_2^H \underline{v}_2}_{\|\underline{v}_2\|^2} & \dots & \underbrace{\underline{v}_2^H \underline{v}_n}_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\underline{v}_n^H \underline{v}_1}_0 & \underbrace{\underline{v}_n^H \underline{v}_2}_0 & \dots & \underbrace{\underline{v}_n^H \underline{v}_n}_{\|\underline{v}_n\|^2 = 1} \end{bmatrix} = I$$

۳. ماتریس همبستگی R_x در حالت کلی یک ماتریس معین غیر منفی است.

non-negative definite (nnd)

دائرهای قطری بین عناصر برابر هستند x وجود نداشته باشد، یک ماتریس معین مثبت

Positive definite (Pd)

است.

ماتریس $A_{n \times n}$: ماتریس A nnd می‌گوییم اگر داشته باشیم.

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n ; \quad \underline{z}^H A \underline{z} \triangleq h_A(\underline{z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i^* a_{ij} z_j \geq 0$$

نرم مرتبی برابر $\underline{z}$ با ماتریس A

اگر سادگی برابر نباشد، ماتریس A Pd می‌گوییم.

اثبات :

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{z}^H R_x \underline{z} = \underline{z}^H \underline{X} \underline{X}^H \underline{z}$$

$$= \underbrace{\underline{z}^H \underline{X}}_{\alpha} \underbrace{\underline{X}^H \underline{z}}_{\alpha^*} = \epsilon |\underline{z}^H \underline{X}|^2 \geq 0$$

خطی بودن اسکالر

اگر خطی خطی بین عناصر برابر $\underline{X}$ وجود نداشته باشد یعنی هیچ بردار $\underline{z}$ ای وجود نداشته باشد که به ازای آن داشته باشد $\underline{z}^H \underline{X} \stackrel{MS}{=} 0$ ، $|\underline{z}^H \underline{X}|^2 = 0$ ، ان شاء الله داریم

$$\underline{z}^H R_x \underline{z} = \epsilon |\underline{z}^H \underline{X}|^2 > 0 \rightarrow R_x \text{ پدیده‌ی PD است.}$$

۴- تمامی مقادیر ویژه ی ماتریس معکوس R_x غیر منفی (در حقیقت) هستند.

اثبات: ماتریس R_x یک ماتریس $n \times n$ است برای آن داریم،

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{z}^H R_x \underline{z} \geq 0 \quad \xrightarrow[\text{ریشه ی ویژه ی } R_x \text{ با برداری هم‌جهت}]{\text{نظر برای بردار حال}} \quad \underline{v}_i^H \underbrace{R_x \underline{v}_i}_{\lambda_i \underline{v}_i} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lambda_i \underbrace{\underline{v}_i^H \underline{v}_i}_{\|\underline{v}_i\|^2=1} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \lambda_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

* اگرایی معکوس عناصر بردار $\underline{x}$ وجود نداشته باشد تمامی مقادیر ویژه ی R_x مثبت (در حقیقت) افزایش یابد.

* در حالت کلی داریم $\det(R_x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ ، اگرایی معکوس عناصر $\underline{x}$ وجود نداشته باشد $\det(R_x) > 0$.

۵- ماتریس همبستگی R_x را به صورت تئران به نرم مکی $R_x = L L^H$ تجزیه کرد.
اثبات: حس دانشم

$$R_x \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$V = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]$$

$$R_x \underbrace{[\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]}_V = [\lambda_1 \underline{v}_1 \mid \lambda_2 \underline{v}_2 \mid \dots \mid \lambda_n \underline{v}_n] \\ = \underbrace{[\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]}_V \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_V$$

$$\Rightarrow R_x V = V \Lambda \xrightarrow[\text{در } V^H \text{ ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را از راست}} R_x \underbrace{V V^H}_I = V \Lambda V^H$$

$$\Rightarrow \underline{R_x = V \Lambda V^H} \quad \left. \begin{array}{l} \text{یعنی} \\ \text{تجزیه برابری درجه - معادله درجه ی ماتریس } R_x \\ \text{(SVD)} \end{array} \right\}$$

$$R_x = V \Lambda V^H = \underbrace{V \Lambda^{1/2}}_L \underbrace{\Lambda^{1/2} V^H}_{L^H} = L L^H$$

↑
ماتریس درجه معکوس، غیر منفی

* تجزیه‌ی R_x به نرم
 تجزیه‌ی یابنده، حتماً در هر نرم
 مکان U یک ماتریس یکانی (unitary) است.

مفهوم نزدیکت زیرا اگر $R_x = L L^H$ جواب

$L' = L^* U$ نیز یک جواب تجزیه است که

$$L' L'^H = L^* U (L^* U)^H = L^* \underbrace{U U^H}_I L^{*H} = L^* L^{*H} = R_x$$

* از بین جواب‌های مختلف تجزیه‌ی R_x به نرم

جواب یکانی مثلاً $R_x = L L^H$ ، جواب یکانی مثلاً

اهمیت دربردارای دارد (تجزیه‌ی چولسکی)

یکانی مثلاً L : $R_x = L L^H$ ،

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad l_{ij} = 0, \quad \forall i < j$$

$$L L^H = R_x \rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{21} & & \hat{l}_{n1} \\ & \hat{l}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{l}_{nn} \end{bmatrix} = R_x$$

با بل دستگاه محادلات به دست آمده از رابطه‌ی ماتریسی بالا، l_{ij} ها به دست می‌آیند.

تمرین: الگوریتم تجزیه‌ی چولسکی را استخراج کنید.

تمرین شبیه‌سازی: به الگوریتم تجزیه‌ی چولسکی را بنویسید.

۶- بزرگترین مقدار C_x که در این شرایط حاصل می‌شود را C_x^* می‌نامند. در واقع $C_x^* = \max_{C_x} C_x$ است. هر آنکه در مورد ماتریس R_x تفهیم، در مورد ماتریس C_x نیز برقرار است. این نشان می‌دهد که نتیجه‌گیری حاصل از این روشی، عناصر C_x انجام می‌دهد.

به عنوان مثال: ماتریس C_x در حالت کلی $n \times n$ است. اگر R_x را به صورت $R_x = P D P^H$ بنویسیم، عناصر بردار مقادیر C_x را می‌توان به صورت $C_x = P D P^H$ نوشت. در اینجا D یک ماتریس قطری است.

$$\det(C_x) \geq 0$$

شرط لازم رگرسی برای اینکه رابطه خطی بین عناصر بردار تصادفی $\tilde{x}$ بر داشته باشند این است که ماتریس کواریانس C_x سینگولر باشد. (تکین)

$$\det(C_x) = 0 \iff \exists a_1, a_2, \dots, a_n ; \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i = 0$$

$$\underline{v}^H \underline{\tilde{x}} = 0, \quad \underline{v} = [a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*]^T$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i (x_i - m_{x_i}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i w_{x_i} = \text{cte}$$

ایندی affine استری
بن عناصر دارف رن x

آزمون میان رزم چارشنبه ۲۹، ۸، ۹۸ ساعت ۱۵:۱۰

(تا آخر مطالب درس گفته شده در روز درشنبه ۲۷، ۸، ۹۸)

در هدرن که با تغییر زمان میان رزم شکل هدی دارند، تا قبل از روز درشنبه ۲۰، ۸، ۹۸ به بن هدی هدی