

dr-haghighin.info / Courses / Stochastic Processes

سه تا ۳ خرداد

معرفی دو تابع احتمال شرطی یک‌دیگر

$$1) \quad F_x(x | y \leq y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{کند}}}{=} F_x(x | y) = \frac{F_{xy}(x, y)}{F_y(y)}$$

ابطال می‌شود
 $\Rightarrow$

$$F_{xy}(x, y) = F_x(x) F_y(y | x) = F_y(y) F_x(x | y)$$

$$2) f_x(x|y=y) = \frac{d}{dx} F_x(x|y=y)$$

$$\uparrow = \frac{d}{dx} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} F_x(x|y < y \leq y+\Delta y)$$

منبر بران احتمال ساده، متغیرهای تصادفی پیوسته

$$= \frac{d}{dx} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P_r \{x \leq x, y < y \leq y+\Delta y\}}{P_r \{y < y \leq y+\Delta y\}}$$

(این مرحله را «سازی عملیات به عنوان قرین»)

$$\Rightarrow f_x(x|y=y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$f_x(x|y=y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{و}}}{f_x(x|y)} = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)} \quad (1)$$

$$f_y(y|x=x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{و}}}{f_y(y|x)} = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} \quad (2) \quad \sim \text{طریق مستقیم}$$

$\xrightarrow{\text{در این مورد، اگرچه}} \quad f_{xy}(x,y) = f_x(x) f_y(y|x) = f_y(y) f_x(x|y)$
 (1), (2)

مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$1) \quad f_x(x|y \leq y) = \frac{d}{dx} \underbrace{F_x(x|y)}_{F_x(x|y \leq y)} \quad \checkmark$$

$$2) \quad \underbrace{f_x(x|y)}_{f_x(x|y=y)} = \frac{d}{dx} \underbrace{F_x(x|y)}_{F_x(x|y \leq y)} \quad \times$$

استقلال در متغیرهای X, Y

یادآوری: استقلال در بیش از A, B

دوین است A, B را مستقل از هم می گوئیم هرگاه در توزیع ملی از آن (فصلی بران
می آید) هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد. یا بیان ریاضی

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A)P(B)$$



$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$\Leftarrow$ رویش آمد مستقل از هم، احتمالات غیر صفر، صفا دارای اشتراک فاصله بود.

توضیح: جدا از هم نیستند. جدا از هم بودن رویش آمد A, B به معنی نه داشتن اشتراک است.

یعنی $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0$

* در متغیر صفا X, Y را مستقل از هم می گیریم هرگاه $\dots$ رویش آمد دلخواه در رابطه با

X مستقل از رویش آمد دلخواه در رابطه با Y باشد. بیان ریاضی

$\forall A, B \subseteq \mathbb{R} , \quad \underbrace{\{X \in A\}}_{\text{رویش آمد}} \perp\!\!\!\perp \underbrace{\{Y \in B\}}_{\text{رویش آمد}} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

غدا مستقل

$\underline{\underline{P}} \quad P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} P\{Y \in B\}$

در این رابطه، مقصود زیر یکدک کننده است.

مقصود: شرط لازم و کافی برای اینکه هر شیء آماری در رابطه با x مستقل از هر شیء آماری در رابطه با y باشد، این است که پیش آمدهایی به فرم زیر در رابطه با x و y ، مستقل

$$\text{از هم باشند} \quad \{y \leq y\} \perp\!\!\!\perp \{x \leq x\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

یعنی پیش آمدهایی به فرم $\{x \leq x\}$ و $\{y \leq y\}$ مستقل از هم باشند.

$$\text{تعريف : } X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall A, B \subseteq \mathbb{R}, \{X \in A\} \perp\!\!\!\perp \{Y \in B\}$$

$$\iff \forall x, y \in \mathbb{R}, \{X \leq x\} \perp\!\!\!\perp \{Y \leq y\}$$

$$\iff \forall x, y \in \mathbb{R}, P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

$$\iff \forall x, y \in \mathbb{R}, F_{xy}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$\forall x, y, F_{xy}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \iff X \perp\!\!\!\perp Y$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی قبل، استفاده از روابط زیر، شرط‌های مجاور، برابری استدل»
 متغیر تصادفی X, Y - درست می‌آید.

$$1) \forall x, y \in \mathbb{R}, F_{xy}(x, y) = F_x(x) F_y(y) \Leftrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$2) \forall x, y \in \mathbb{R}, f_{xy}(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$

$$3) \forall x, y \in \mathbb{R}, F_y(y|x) = F_y(y) \quad \xrightarrow{x \leq x}$$

$$4) \forall x, y \in \mathbb{R}, F_x(x|y) = F_x(x)$$

$$5) \forall x, y \in \mathbb{R}, f_y(y|x) = f_y(y)$$

$$6) \forall x, y \in \mathbb{R}, f_x(x|y) = f_x(x) \quad \xrightarrow{y=y}$$

مشتق‌گیری از (1)

استفاده از روابط زیر

خدا کند :

۱- اگر توابع احتمال توأم در متغیرهای x, y ، تقابلی پذیر باشند، می توان نتیجه گرفت که

در متغیرهای دخی، مستقل از هم هستند.

$$F_{xy}(x, y) = G_1(x) G_2(y)$$

$$f_{xy}(x, y) = g_1(x) g_2(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

(به عنوان تمرین اثبات کنید)

۲- اگر در متغیرهای دخی x, y مستقل از هم باشند، حتماً بعضی از x بر مستقل از بعضی از y مراحه

بود. یعنی

$$x \perp y, \quad z_1 = g_1(x), \quad z_2 = g_2(y) \Rightarrow z_1 \perp z_2$$

Expectation

* امید ریاضی

امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی x مانند $g(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E\{g(x)\} = E g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{مقداری که} \\ \text{امید ریاضی که}}} \underbrace{f_x(x)}_{\substack{\text{مقداری از متوسط (ایمانین)}}} dx \equiv$$

↑
اضافه

مقداری که $g(x)$ امید ریاضی که

مقداری از متوسط (ایمانین)

مقداری که $g(x)$ امید ریاضی که

مقداری که $g(x)$ امید ریاضی که

برای تابعی آزاد، مشروطه‌ای x ، y نیز می‌توان امید ریاضی را تعریف کرد.

$$E\{g(x, y)\} = E g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{xy}(x, y) dx dy$$

• همین می‌توان امید ریاضی شرطی را نیز به صورت زیر تعریف کرد.

$$E\{g(x, y) | A\} = E g(x, y) | A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{xy}(x, y | A) dx dy$$

می‌تواند ثابت باشد، یعنی

۱- $a_1, a_2, \dots, a_n$ $\in \{ \}$ یک عملگر خطی است. یعنی

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \quad \in \{ a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) \}$$
$$= a_1 \in g_1(x) + a_2 \in g_2(x) + \dots + a_n \in g_n(x)$$

$$\therefore \in \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i \in g_i(x)$$

به عنوان مثال: اگر X یک متغیر تصادفی تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد، امید ریاضی مشخصه
تصادفی زیر را به دست بیاورید.

$$1) \quad Y = aX + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad EY = ?$$

$$EY = E\{aX + b\} = aEX + b = a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + b$$

$$2) \quad Y = a_1 X^3 + a_2 X + a_3, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad EY = ?$$

$$\begin{aligned} EY = E\{a_1 X^3 + a_2 X + a_3\} &= a_1 EX^3 + a_2 EX + a_3 \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + a_3 \end{aligned}$$

نکته ۲: استفاده از رابطه زنجیره‌ای برای - است آر درن امید ریاضی

$$E g(x, y) = E_y \left\{ E_x \left\{ g(x, y) \mid y=y \right\} \right\}$$

تابعی از: $y=y$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \underbrace{f_y(y) f_x(x|y)}_{f_x(x) f_y(y|x)} dx dy$$

$y=y$

$x=x$

اثبات به عنوان تمرین

$$= E_x \left\{ E_y \left\{ g(x, y) \mid x=x \right\} \right\}$$

تابعی از: $x=x$

$$y = AC(\alpha + \theta)$$

$$f_{A, \theta}(\alpha, \theta)$$

به عنوان مثال: برای محاسبه امید ریاضی متغیر تصادفی

A ، θ متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال نرمال

صورت زیر محاسبه کرد.

$$E y = E AC(\alpha + \theta) = E_{\theta} \left\{ E_A \left\{ AC(\alpha + \theta) \mid \theta = \theta \right\} \right\}$$

$$= E_{\theta} \left\{ C(\alpha + \theta) EA \mid \theta = \theta \right\} = E_{\theta} \left\{ C(\alpha + \theta) \underbrace{EA}_{\text{عصبیت تصادفی برابر}} \right\}$$

$$= EA E_{\theta} \{ C(\alpha + \theta) \}$$

نکته ۳: اگر در تعریفی x, y مستقل از هم باشند و داشته باشیم

$$g(x, y) = g_1(x) g_2(y)$$

$$\Rightarrow \epsilon g(x, y) = \epsilon g_1(x) g_2(y) \stackrel{x \perp y}{=} \underset{x}{\epsilon g_1(x)} \underset{y}{\epsilon g_2(y)}$$

$$f_{x,y}(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$

(اثبات به عنوان تمرین)

نکته ۴: اگر تابع $g(x, y)$ به صورت زیر باشد:

$$g(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$$

$$\Rightarrow E g(x, y) = E \{ g_1(x) + g_2(y) \}$$

$$= \underset{x}{E} g_1(x) + \underset{y}{E} g_2(y)$$

↑
مقی بودن، خصوصیات تابع چگالی احتمال را

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dy = f_x(x)$$

(به عنوان تمرین اثبات شود)

Moment

* همان‌صای متغیرهای تصادفی

- برای متغیر تصادفی X ، همان مرتبه‌ی n ام متغیر تصادفی، اهمیت زیر تعریف می‌شود

$$\text{همان مرتبه } n \text{ام} \equiv E X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$$

این همان‌صا، خصوصیات را در مورد متغیرهای تصادفی در اختیار ما قرار می‌دهد به عنوان مثال برای استخراج ویژگی‌ها یا کلاس بندی متغیرهای تصادفی، می‌توان از همان‌صا کمک گرفت.

برگه بردارن همان های یک متغیر تصادفی در یکت های هندسی برن . همان های اول در درام متغیر تصادفی

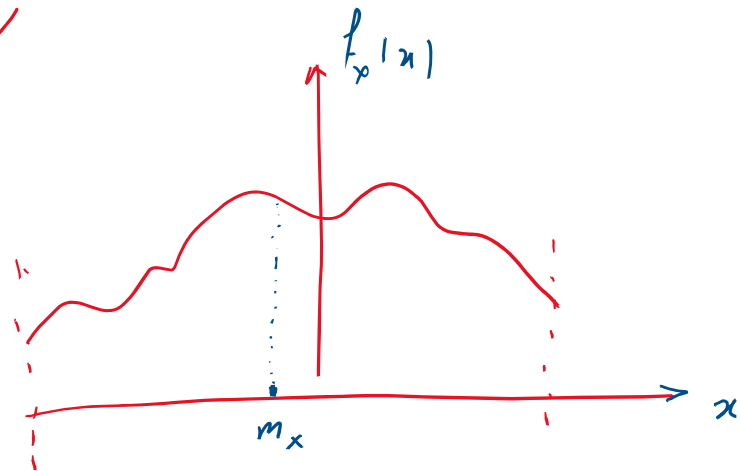
میانگین
mean

$$m_x = E x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

فراوانی متغیری
متغیری که متغیر تصادفی x اختیار می کند
که متغیر تصادفی اختیار می کند

همان در تبار اول متغیر تصادفی x

معادری از میانگین است
متغیر تصادفی x



* همان مرتبه دوم متغیر تصادفی X

Power

$$r_x = P_x = E X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2}_{\text{Power}} f_x(x) dx$$

از توانی متغیری که X اختیار می کند

$E X^2$ نشان دهنده ی توانی متغیری است که متغیر تصادفی X اختیار می کند، از این جهت توان قدرت متغیر تصادفی نیز گفته می شود. همین محادل عدد همبستگی متغیر تصادفی X نیز هست.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{\uparrow} \cdot \underbrace{x}_{\uparrow} f_x(x) dx$$