

کلاس حل تمرین در فضای هیلبرت یکشنبه ۵، ۱۱، ۹۹

* دو فرآیند تصادفی - همبستگی توأم

در بسیاری از کتابها، لازم است که دو فرآیند تصادفی مانند $x(t)$ ، $y(t)$ ، همبستگی توأم بررسی کنیم، خصوصیات توأم، میزان ارتباط آنها را با هم بررسی می‌کنیم.

$$T_x \Omega \xrightarrow{x(t)} \mathbb{R}$$



فضای هیلبرت
 $x(t)$

$$T'_x \Omega \xrightarrow{y(t)} \mathbb{R}$$



فضای هیلبرت
 $y(t)$

در این حالت با بردارهای به نرم کلی بر، سرده، ضرایب داشت

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \\ y(t'_1) \\ y(t'_2) \\ \vdots \\ y(t'_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{x_1}_{\underline{x}} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \underbrace{y_1}_{\underline{y}} \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \vdots \\ \underline{y} \end{bmatrix}$$

$$x(t_i) \equiv x_i, \quad y(t'_j) \equiv y_j$$

بنابراین با بردارهای از $y(t), x(t)$

- صورت تمام بردار داریم

در نتیجه تمام صفاتی که در بخش بردارها

(و در مورد همه بردار صفاتی) بیان کردیم، در این

بخش نیز مورد استفاده قرار می گیرند.

به این ترتیب برای کارگران با دو فرآیند تصادفی به صورت توأم، نیاز به تراکم احتمال توأم دو فرآیند داریم که همان توصیف آماری توأم دو فرآیند خواهد بود. این ترتیب توصیف آماری توأم دو فرآیند $x(t)$ و $y(t')$ از مرتبه n ام نسبت به $x(t)$ از مرتبه m ام نسبت به $y(t')$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$f_{x(t_1) \dots x(t_n) y(t'_1) \dots y(t'_m)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \longrightarrow \begin{array}{l} \text{تراکم احتمال توأم در بردار } \underline{x} \text{ و } \underline{y} \\ \text{از فرآیندهای } x(t) \text{ و } y(t') \end{array}$$

$$\equiv f_{xy}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{t}, \underline{t'})$$

$$\begin{cases} \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \\ \underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T \\ \underline{t'} = (t'_1, t'_2, \dots, t'_m)^T \end{cases}$$

✓ اگر توصیف آماری توأم در فرآیند رایجی $n \rightarrow \infty$ ، $m \rightarrow \infty$ نیز در اختیار داشته باشیم.
 ✓ می‌توانیم که یک توصیف حاصل آماری توأم لذا در فرآیند در اختیار داریم.

✓ اگر توصیف آماری توأم در فرآیند $X(t)$ ، $Y(t')$ از مرتبه n ام نسبت به $X(0)$ ، از مرتبه m ام نسبت به $Y(0)$ داشته باشیم،

توصیف آماری توأم دو فرآیند از مرتبه‌های پایین‌تر توصیف آماری فرآیند $X(t)$ از مرتبه n ام پایین‌تر توصیف آماری فرآیند $Y(t')$ از مرتبه m ام پایین‌تر	}	داشته باشیم.
--	---	--------------

را در اختیار خواهیم داشت.

* استقلال دو فرکانس $x(t)$, $y(t')$

دو فرکانس $x(t)$, $y(t')$ مستقل از هم می‌گوئیم اگر هر بردار صدائی از متغیرهای $x(t)$ مستقل از هر بردار صدائی از متغیرهای $y(t')$ باشد. بیان ریاضی آن به صورت زیر است.

$$\forall n, m, \quad \forall \underline{t} \in T^n, \quad \forall \underline{t}' \in T'^m, \quad \boxed{\underline{x} \perp \underline{y}} \Rightarrow x(t) \perp y(t')$$

$$\underline{x} = [x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n)]^T \equiv [x_1, x_2 \dots x_n]^T$$

$$\underline{t} = [t_1, t_2 \dots t_n]^T$$

$$\underline{t}' = [t'_1, \dots, t'_m]^T$$

$$\underline{y} = [y(t'_1) \dots y(t'_m)] \equiv [y_1, y_2 \dots y_m]^T$$

با عبارت دیگر استوای احتمال تمام $\underline{x}$ ، $\underline{y}$ (ترکیب آماری تمام دو فرایند $x(t)$ ، $y(t')$ با پای
 هر بردار رگخواه $x(t)$ ، $y(t')$ تشکیل پذیر باشد، دو فرایند مستقل از هم خواهند بود

$$\forall n, m, \forall \underline{t} \in T^n, \forall \underline{t}' \in T'^m, f_{xy}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{t}, \underline{t}') = f_x(\underline{x}, \underline{t}) f_y(\underline{y}, \underline{t}')$$

$$\Rightarrow x(\cdot) \perp\!\!\!\perp y(\cdot)$$

* فرایند مکتلا $z(t)$

یک فرایند مکتلا $z(t)$ به صورت زیر قابل بیان است

$$z(t) = \underbrace{\operatorname{Re}\{z(t)\}}_{\text{فرایند حقیقی}} + j \underbrace{\operatorname{Im}\{z(t)\}}_{\text{فرایند تصادفی}} \equiv x(t) + jy(t)$$

بنابراین وقتی یک فرایند مکتلا $z(t)$ سرکار داریم، عمده با فرایند حقیقی و
موضوعی آن به صورت توأم جاری کنیم معنی $x(t)$ را به صورت توأم بررسی می کنیم
بنابراین تمامی مطالبی که در بخش قبلی در مورد فرایند تصادفی به صورت توأم بیان کردیم، برای

فرا سیگنالهای مختلف نیز استفاده می شود. با این تفاوت که در فرا سیگنالهای مختلف، فضای پارامتر برای سمت های حقیقی، موهومی، بلکیان است. (محدوده $n=m$)

$$T \times \Omega \xrightarrow{z(t)} \mathbb{C}, \quad z(t) = x(t) + jy(t)$$

$$T \times \Omega \xrightarrow{x(t)} \mathbb{R}, \quad T \times \Omega \xrightarrow{y(t)} \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \\ y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \vdots \\ \boxed{x_n} \\ \boxed{y_1} \\ \boxed{y_2} \\ \vdots \\ \boxed{y_n} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} x \\ - \\ - \\ - \\ y \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

درباره سمت حقیقی $z(t)$

درباره سمت موهومی $z(t)$

* همان حساب مرتبه اول، دردم یک فرآیند تصادفی

- همان مرتبه اول فرآیند تصادفی $x(t)$

$E x(t, \xi)$

$$\underbrace{E x(t)} = \int x f_x(x, t) dx \equiv m_x(t) \quad \text{در صحت کلی تابعی از زمان (t) است}$$

تابعیت از ξ ندارد

تابع میانگین فرآیند تصادفی $x(t)$

نشان دهنده میانگین متغیر تصادفی لحظه t از فرآیند

$$m_x(t_i) \equiv \underbrace{E x(t_i)}_{x_i} = E x_i$$

* همان مرتبه درم فرآیند تصادفی $x(t)$

$$E \overbrace{x_1}^{x_1} \overbrace{x_2^*}^{x_2^*} (t_2) = \int x_1 x_2 f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$E x(t_1) x^*(t_2) = R_x(t_1, t_2)$$

در حالت کلی تابعی از t_1, t_2 است

تابع همبستگی فرآیند $x(t)$

۱- تابع همبستگی فرآیند $x(t)$ حتی $R_x(t_1, t_2)$ نشان دهنده همبستگی متقابل متغیرها

تصادفی لحظات t_1, t_2 از فرآیند است.

در نتیجه اگر به ازای یک t_1, t_2 خاص، رابطه باشیم

$$\exists t_1, t_2 : R_x(t_1, t_2) = 0 \implies x(t_1) \perp x(t_2)$$

$$\therefore x_1 \perp x_2$$

۲. تابع همبستگی $R_x(t_1, t_2)$ برای $t_1 = t_2 = t$ نشان دهنده قدرت متوسط توانی لحظه‌ای t را می‌رساند.

$$R_x(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t} = R_x(t, t) = E[x(t)x^*(t)] = E[|x(t)|^2] \equiv P_x(t)$$

معادل قدرت لحظه‌ای فرایند $x(t)$ می‌باشد.

۳- با برآورد تعریف تابع همبستگی، می توان نتیجه گیری کرد که تابع همبستگی $R_x(t_1, t_2)$ دارای تبادلی همبستگی - خرم برابر است.

$$R_x^*(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$$

$$R_x^*(t_1, t_2) = \left(E x(t_1) x^*(t_2) \right)^* = E x(t_2) x^*(t_1) \equiv R_x(t_2, t_1)$$

همان مرتبه درم مرکزی فرانسه $x(t)$

داریم $x(t)$ همان مرتبه درم مرکزی معریف شد

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - m_x(t) \Rightarrow E \tilde{x}(t) = 0$$

$$E \tilde{x}(t_1) \tilde{x}'(t_2) = E \left(\underbrace{x(t_1)}_{x_1} - \underbrace{m_x(t_1)}_{m_{x_1}} \right) \left(\underbrace{x(t_2)}_{x_2} - \underbrace{m_x(t_2)}_{m_{x_2}} \right)^*$$

$$= C_x(t_1, t_2)$$

در حالت کلی تابع از t_1, t_2 است

به آن تابع کوارینانس فرانسه $x(t)$ گفته می شود

۱- تابع کوارِانس فرآیند $x(t)$ یعنی $C_x(t_1, t_2)$ نشان دهنده کوارِانس متقابل متغیرهای
صادفی لحظات t_1, t_2 از فرآیند $x(t)$ است.

در نتیجه اگر $\exists t_1, t_2, C_x(t_1, t_2) = 0$

آنگاه می‌توان گفت که متغیرهای صادفی لحظات t_1, t_2 فرآیند اعمیبه صند

$$x(t_1) \perp x(t_2) \quad ; \quad x_1 \perp x_2$$

۲. تابع کواریانس فرآیندهای $X(t)$ یعنی $C_X(t_1, t_2)$ برای $t_1 = t_2 = t$ نشان دهنده واریانس متغیر تصادفی لحظه‌ای t از فرآیند است.

$$C_X(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t} = C_X(t, t) = E \bar{X}(t) \bar{X}(t) = E |\bar{X}(t)|^2$$

معادل واریانس لحظه‌ای فرآیند نوسان است.

$$= \sigma_X^2(t)$$

۳- تابع کواریانس فرکانس صدایی $x(t)$ دارای مقدار میان حرکتی برابر است.

$$C_x^{\bullet}(t_1, t_2) = C_x(t_2, t_1) \quad (\text{به عنوان تمرین نشان دهید})$$

۴- رابطه بین $C_x(t_1, t_2)$ ، $R_x(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} C_x(t_1, t_2) &= E \tilde{x}(t_1) \tilde{x}^{\bullet}(t_2) = E (x(t_1) - m_x(t_1)) (x(t_2) - m_x(t_2))^{\bullet} \\ &= \underbrace{E x(t_1) x^{\bullet}(t_2)}_{R_x(t_1, t_2)} - \underbrace{m_x(t_1)}_{m_x(t_1)} \underbrace{E x(t_2)}_{m_x(t_2)} - \underbrace{m_x^{\bullet}(t_2)}_{m_x^{\bullet}(t_2)} \underbrace{E x(t_1)}_{m_x(t_1)} + m_x(t_1) m_x^{\bullet}(t_2) \\ &= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_x^{\bullet}(t_2) \end{aligned}$$

به طریق مشابه برای دریافت صدایی $x(t)$ ، نیز همان صدای متقابل معرّفی می شود که در ادامه همان صدای متقابل مرتبه اول نسبت به $x(t)$ ، $y(t)$ را بررسی می کنیم .

* همان متقابل مرتبه اول نسبت به $x(t)$ ، $y(t)$

$$E x(t) y'(t') = R_{xy}(t, t')$$

در حالت کلی تابعی از t, t' است
 همان تابع همبستگی متقابل دریافت صدای $x(t)$ ، $y(t)$ گفته می شود

۱- تابع همبستگی متقابل در فرکانس $x(t)$ ، $y(t')$ یعنی $R_{xy}(t, t')$ نشان دهنده
 همبستگی متقابل متغیرهای تصادفی لحظه t از فرکانس $x(t)$ ، لحظه t' از فرکانس y
 است.

در سطح $\checkmark$ اگر

$$\exists t, t' , R_{xy}(t, t') = 0$$

می‌توان گفت که متغیرهای تصادفی لحظه t از $x(t)$ ، لحظه t' از $y(t')$ بر هم عمود هستند

$$x(t) \perp y(t')$$

۲- بر این اساس در نظر آید $x(t)$, $y(t')$, متعامدی داریم اگر شرط متعامدی از $x(t)$ بر شرط متعامدی از $y(t)$ عموماً باشد.

$$\forall t, t' , R_{xy}(t, t') = E[x(t)y^*(t')] = 0 \quad , \quad x(t) \perp y(t')$$

$$\Rightarrow x(t) \perp y(t)$$

۳- تابع همبستگی متقابل در نظر آید $x(t)$, $y(t')$ دارای نوعی تبادلی همبستگی همبستگی بر اینست.

$$R_{xy}^*(t, t') = R_{yx}(t', t)$$

(به عنوان تمرین نشان دهید)

* همان متغیر مرکزی مرتبه اول نسبت به $x(t)$ ، $y(t')$

$$E \tilde{x}(t) \tilde{y}'(t') = E (x(t) - m_x(t)) (y(t') - m_y(t'))^*$$

$$= C_{xy}(t, t')$$

در حالت کلی تابعی از t, t' است

بر آن تابع کواریانس متقابل به فرم $x(t), y(t')$ گفته می شود

۱- تابع کواریانس متقابل $x(t), y(t')$ نشان دهنده کواریانس متقابل متغیرهای تصادفی لحظه t

از $x(t)$ و لحظه t' از $y(t')$ است

$$\exists t, t' ; \quad C_{xy} |t, t'| = 0 \quad \text{در سیمه آخر}$$

آن زمان می توان گفت که متغیرهای صدایی لحظه t از $x(t)$ ، لحظه t' از $y(t')$ ، متغیر صدایی

$$x(t) \perp y(t')$$

۲- بر این اساس در خواهیم دید $x(t)$ ، $y(t')$ ، متغیر صدایی که توپیم اگر متغیر صدایی از $x(t)$ متغیر صدایی از $y(t')$ باشد.

$$\forall t, t' ; \quad C_{xy} |t, t'| = E \tilde{x}(t) \tilde{y}^o(t') = 0 \quad ; \quad x(t) \perp y(t')$$

$$\Rightarrow x(t) \perp y(t')$$

۳- تابع کدرا، اینس متقابل در نظر آید $x(t)$ ، دارای ندری متوازن حریمک صورت
 زیر است.

$$C_{xy}^{\wedge}(t, t') = C_{yx}(t', t) \quad (\text{به عنوان تمرین نشان دهید})$$

۴- رابطه بین $C_{xy}(t, t')$ و $R_{xy}(t, t')$

$$\begin{aligned} C_{xy}(t, t') &= E(x(t) - m_x(t))(y(t') - m_y(t')) \\ &= R_{xy}(t, t') - m_x(t) m_y^{\wedge}(t') \end{aligned} \quad (\text{به عنوان تمرین نشان دهید})$$

* داشتن توابع حاصلی، کران‌یابی، حاصلی متقابل، کران‌یابی متقابل. می‌توان ماتریس‌های حاصلی، کران‌یابی و حاصلی متقابل، کران‌یابی متقابل، حرارت را در کمپوزیت از فرایندهای $x(t)$ ، $x'(t)$ را به دست آورد.

به عنوان مثال: فرض کنیم $R_x(t_1, t_2)$ در مورد فرایند $x(t)$ ارائه می‌دهیم. ماتریس

حالی را در معادله زیر به دست می‌آوریم:

$$\underline{Z} = \left[\underbrace{x}_{x_1} \left(\underbrace{1}_{t_1} \right), \underbrace{x}_{x_2} \left(\underbrace{2.5}_{t_2} \right), \underbrace{x}_{x_3} \left(\underbrace{4}_{t_3} \right) \right]^T$$

$$R_z = ? = \begin{bmatrix} r_{x_1} & r_{x_1, x_2} & r_{x_1, x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_3, x_1} & \dots & r_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(1, 1) & R_x(1, 2.5) & R_x(1, 4) \\ R_x(2.5, 1) & R_x(2.5, 2.5) & R_x(2.5, 4) \\ R_x(4, 1) & R_x(4, 2.5) & R_x(4, 4) \end{bmatrix}$$

در ادامه می خواهیم خصوصیتی از فرآیندهای تصادفی مطرح کنیم که با دسته زمان درای آنها تأثیر گذار است. در سمت اول، خصوصیات باغ مستقل بودن، مارکوف بودن، و مارکوف بودن فرآیندها مطرح می کنند.

۱- باغ مستقل independent increment

فرآیند $X(t)$ دارای باغ مستقلی خواهیم اگر داشته باشیم

$$\forall t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, \quad \underline{X(t_1)} \perp\!\!\!\perp [X(t_2) - X(t_1)] \perp\!\!\!\perp [X(t_3) - X(t_2)] \dots$$

$$\perp\!\!\!\perp [X(t_n) - X(t_{n-1})]$$

با بیان دیگر اگر تغییر مقدار در لحظه از مَرآتِه مستقل باشد از مَرآتِه در بازه‌های بدون اشتراک بعدی، در این صورت مَرآتِه را با مَرآتِه مستقل می‌توانیم



$$x(t_2) \perp\!\!\!\perp x(t_3) - x(t_4) \quad \checkmark$$

$$x(t_3) - x(t_2) \perp\!\!\!\perp x(t_5) - x(t_4) \quad \checkmark$$

$$x(t_6) - x(t_3) \perp\!\!\!\perp x(t_5) - x(t_4) \quad \times$$